

## PROMAT - Exame de Qualificação 2012-1

### 1.

**(10pts)** Um corpo está contido num ambiente de temperatura constante. Decorrido o tempo  $t$  (em minutos), seja  $D(t)$  a diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente. Segundo a Lei do Resfriamento de Newton,  $D(t)$  é uma função decrescente de  $t$ , com a propriedade de que um decréscimo relativo

$$\frac{D(t) - D(t + h)}{D(t)}$$

no intervalo de tempo  $[t, t + h]$  depende apenas da duração  $h$  desse intervalo (mas não do momento em que essa observação se iniciou). Isto posto, responda à seguinte pergunta:

Num certo dia, a temperatura ambiente era de  $30^\circ$ . A água, que fervia a  $100^\circ$  numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo ficou com a temperatura de  $60^\circ$ . Qual era a temperatura da água 15 minutos após apagado o fogo?

### 2.

- (a) **(5pts)** Dado um número  $a > 0$ , quanto medem os lados do retângulo de perímetro mínimo cuja área é  $a$ ?
- (b) **(10pts)** Justifique matematicamente por que não se pode responder o item (a) se trocarmos “mínimo” por “máximo”.

### 3.

Uma moeda honesta é lançada sucessivas vezes.

- (a) **(10pts)** Se a moeda for lançada 4 vezes, qual é a probabilidade de que o número observado de caras seja ímpar? E se a moeda for lançada 5 vezes?
- (b) **(5pts)** Observando o resultado do item (a), formule uma conjectura sobre a probabilidade de se observar um número ímpar de caras em  $n$  lançamentos da moeda.
- (c) **(10pts)** Demonstre, utilizando indução finita, a conjectura do item (b).

#### 4.

$ABCD$  é um quadrado,  $M$  é o ponto médio do lado  $BC$  e  $N$  é o ponto médio do lado  $CD$ . Os segmentos  $AM$  e  $BN$  cortam-se em  $P$ .

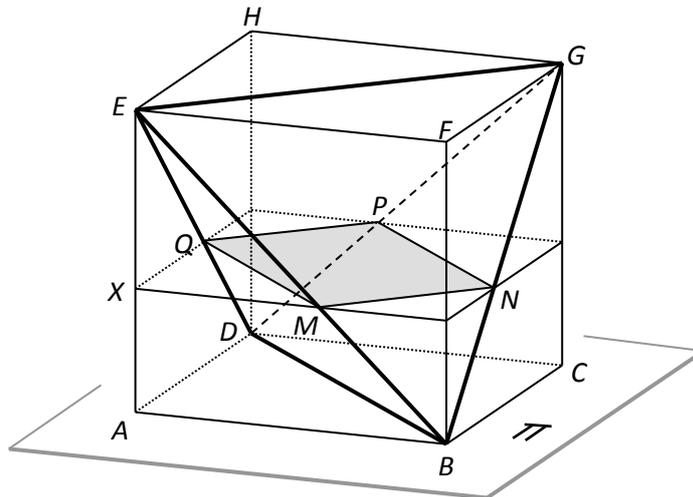
- (a) **(5pts)** Mostre que  $\frac{PB}{PN} = \frac{2}{3}$ .
- (b) **(5pts)** Calcule a razão  $\frac{PA}{PM}$ .
- (c) **(5pts)** Se  $AB = 1$  calcule a área do quadrilátero  $PMCN$ .

*Obs: Para mostrar os itens (b) e (c) você pode usar o resultado do item (a) mesmo que não o tenha demonstrado.*

#### 5.

Na figura abaixo,  $ABCDEFGH$  é um cubo de aresta 1.  $AE, BF, CG$  e  $DH$  são arestas e a face  $ABCD$  está contida em um plano horizontal  $\Pi$ . Seja  $T$  o tetraedro  $BDEG$ . Seja  $X$  um ponto da aresta  $AE$  (diferente de  $A$  e de  $E$ ) e  $\Pi'$  o plano paralelo a  $\Pi$  que passa por  $X$ . A intersecção de  $\Pi'$  com  $T$  é o quadrilátero  $MNPQ$ , como mostrado na figura.

- (a) **(5pts)** Mostre que  $MNPQ$  é um retângulo.
- (b) **(5pts)** Mostre que o perímetro de  $MNPQ$  é igual a  $2\sqrt{2}$ , independentemente do ponto  $X$ .



*(Atenção: como a folha de questões não será olhada na correção, se usar novos elementos na figura é conveniente explicitá-los no caderno de respostas.)*

## 6.

Um truque de adivinhação de números.

- (a) **(5pts)** Descreva e justifique métodos práticos para obter os restos da divisão por 9, 10 e 11, respectivamente, de um número natural escrito no sistema decimal.
- (b) **(5pts)** Ache as soluções mínimas de cada uma das seguintes congruências:
- $110y \equiv 1 \pmod{9}$
  - $99y \equiv 1 \pmod{10}$
  - $90y \equiv 1 \pmod{11}$
- (c) **(10pts)** Um mágico pede a sua audiência para escolher um número natural  $M$  de pelo menos dois algarismos e menor do que 1000, e de lhe revelar apenas os restos  $r_9$ ,  $r_{10}$  e  $r_{11}$  da divisão de  $M$  por 9, 10 e 11, respectivamente (tarefa fácil, pelo item (a)). Sem nenhuma outra informação ele consegue descobrir  $M$ . Explique como ele consegue fazer isto.
- (d) **(5pts)** Supondo que a plateia tenha dado as seguintes informações ao mágico:  $r_9 = 7$ ,  $r_{10} = 8$  e  $r_{11} = 9$ , qual foi o valor de  $M$  que o mágico achou?