UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Prova: Análise Real
Período: Verão-2009- Data-06/02/2009
Professor: Abdênago Barros

1. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + a$ para todo x real. Determine a constante a e a função f.

   Demonstração. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos: $\frac{d}{dx}\Big(\int_0^x f(t)dt\Big) = f(x)$ enquanto $\frac{d}{dx}\Big(\int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + a\Big) = -x^2 f(x) + 2x^{15} + 2x^{17}$. Donde concluímos que $f(x)(x^2+1) = 2x^{15}(x^2+1) \Rightarrow f(x) = 2x^{15}$. Assim temos $\int_0^x 2t^{15}dt = \int_x^1 2x^{17}dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + a \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$. □

2. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e $u:\mathbb{R}\to[a,b]$ uma função derivável. Se $\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é definida por $\Psi(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$ mostre que Ψ é derivável e calcule sua derivada.

   Demonstração. Se $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ então $\Psi(x) = F(u(x))$. Usando a continuidade de f o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que F é derivável e $F' = f$. Assim a regra da cadeia nos dá: $\Psi'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$.

   □

3. Sejam $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que existem $\int_a^b f(t)g(t)dt, \int_a^b f^2(t)dt$ e $\int_a^b g^2(t)dt$. Além disso, temos $\Big(\int_a^b f(t)g(t)dt\Big)^2 \le \Big(\int_a^b f^2(t)dt\Big)\Big(\int_a^b g^2(t)dt\Big)$.

   Demonstração. Sendo f e g contínuas temos que f^2, g^2 e fg também são contínuas. Assim $\mathfrak{D}_{f^2} = \mathfrak{D}_{g^2} = \mathfrak{D}_{fg} = \emptyset$. Consequentemente $m(\mathfrak{D}_{f^2}) = m(\mathfrak{D}_{g^2}) = m(\mathfrak{D}_{fg}) = 0$ e isto prova que as integrais pedidas existem. Agora considere o polinômio p definido em $\mathbb{R}$ por

   $$p(s) = \int_a^b (sf(t)-g(t))^2dt = \big(\int_a^b f^2(t)dt\big)s^2 - 2\big(\int_a^b f(t)g(t)dt\big)s + \int_a^b g^2(t)dt.$$

   Sendo $p(s)\ge 0, \forall\, s\in\mathbb{R}$ temos que o discriminante de p, $\Delta_p \le 0$. Mas este discriminante é dado por $\Delta_p = 4\big(\int_a^b f(t)g(t)dt\big)^2 - 4\big(\int_a^b f^2(t)dt\big)\big(\int_a^b g^2(t)dt\big)$. Donde concluímos o resultado desejado.

$\square$

4. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(xy) = f(x) + f(y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Sabendo que $\int_1^2 f(x)dx = 1$ determine f.

Demonstração. Inicialmente vejamos que $f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$. Logo usando o Teorema da Média obtemos $c \in (1, 2] : 1 = \int_1^2 f(x)dx = f(c)(2-1) = f(c)$. Pelas propriedades de f temos $f(c^m) = mf(c) = m, \forall\, m \in \mathbb{N}$. Assim escrevendo $c^m = c^{(\frac{m}{n})n}$ obtemos $m = f(c^m) = f(c^{(\frac{m}{n})n}) = nf(c^{\frac{m}{n}})$, $m, n \in \mathbb{N}$, i.e. $f(c^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, dado $x \in \mathbb{R}^+$ existe uma seqüência $x_k \in \mathbb{Q}^+ : \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Daí temos que $f(c^x) = f(c^{(\lim\limits_{k\to\infty} x_k)})$. Usando a continuidade de f bem como de c^x podemos reescrever $f(c^x) = f(c^{(\lim\limits_{k\to\infty} x_k)}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(c^{x_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Logo, f é a inversa da função exponencial c^x, i.e. , $f(x) = \log_c x = \frac{\ln x}{\ln c}$. Por outro lado $1 = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{\ln x}{\ln c}dx = \frac{1}{\ln c}\int_1^2 \ln x dx = \frac{1}{\ln c}(x\ln x - x)]_1^2 = \frac{1}{\ln c}(2\ln 2 - 2) - \frac{1}{\ln c}(\ln 1 - 1) = \frac{\ln 4 - 1}{\ln c} = \frac{\ln 4 - \ln e}{\ln c} = \frac{\ln(\frac{4}{e})}{\ln c}$. Logo,

$$f(x) = \log_{(\frac{4}{e})} x.$$

$\square$

5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável. Mostre que dado $\varepsilon > 0$ existem funções escadas $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisfazem $\phi \leq f \leq \psi$ e $\psi - \phi < \varepsilon$.

Demonstração. Como f é integrável, dado $\varepsilon > 0$ existe $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ tal que

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Se $m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} f$ e $M_i = \sup f_{[t_{i-1},t_i]} f$ definindo $\phi(x) = m_i; x \in (t_{i-1}, t_i)$ e $\psi(x) = M_i; x \in (t_{i-1}, t_i)$ temos que $\phi \leq f \leq \psi$.

Suponhamos que exista $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\psi - \phi \geq \frac{\varepsilon_0}{b-a}$ para todas funções escadas ϕ e ψ com $\psi \leq f \leq \phi$. Em particular $\int_a^b \psi dx - \int_a^b \phi dx \geq \int_a^b \frac{\varepsilon_0}{b-a}dx = \varepsilon_0$. Agora dada uma partição qualquer $Q = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ de $[a, b]$ defina as funções escadas como sendo $\phi(x) = m_i; x \in (t_{i-1}, t_i)$ e $\psi(x) = M_i; x \in (t_{i-1}, t_i)$. Segue-se que

$\int_a^b \psi dx = S(f; Q) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$ e $\int_a^b \phi dx = s(f; Q) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$. Portanto, $S(f; Q) - s(f; Q) \geq \varepsilon_0, \forall\, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Isto contradiz a equação $(*)$.

$\square$

6. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana tal que a imagem de um intervalo aberto é também um intervalo aberto. Se $X \subset [a,b]$ tem medida nula mostre que $f(X)$ também tem medida nula.

   Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existem intervalos abertos $J_1, \ldots, J_n, \ldots$, tais que $X \subset \cup_{i=1}^{\infty} J_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |J_i| < \frac{\varepsilon}{K}$, onde K é a constante de Lipschitz de f. Por hipótese $f(J_i) = S_i$ é um intervalo aberto, além disso , $f(X) \subset \cup_{i=1}^{\infty} f(J_i) = \cup_{i=1}^{\infty} S_i$. Como $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ temos que $|S_i| \leq K|J_i|$. Logo $\sum_{i=1}^{\infty} |S_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} K|J_i| = K \sum_{i=1}^{\infty} |J_i| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. Isto mostra que $f(X)$ tem medida nula.

   $\square$

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável. Se $\mathfrak{D}_f$ representa o conjunto dos pontos de descontinuidade de $f(x)$ mostre que o complementar deste conjunto é denso em $[a,b]$.

   Demonstração. Caso $\mathfrak{D}_f^c$ não fosse denso em $[a,b]$ existiria um intervalo $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$ tal que $(\alpha,\beta) \bigcap \mathfrak{D}_f^c = \emptyset \Rightarrow (\alpha,\beta) \subset \mathfrak{D}_f \Rightarrow m(\alpha,\beta) = \beta - \alpha > 0 \Rightarrow m(\mathfrak{D}_f) > 0$. Logo f não seria integrável. $\square$

8. Seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função que possui derivada de ordem 3 integrável. Então $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt$.

   Demonstração. Fazendo $u(t) = \frac{(1-t)^2}{2}$ e $v'(t) = \varphi'''(t)$ obtemos integrando por partes que $\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt = \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)]_0^1 + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt = -\frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt$. Usando o mesmo argumento temos:$\int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt = (1-t)\varphi'(t)]_0^1 + \int_0^1 \varphi'(t)dt = -\varphi'(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt$. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos $\int_0^1 \varphi'(t)dt = \varphi(1) - \varphi(0)$. Finalmente podemos reescrever $\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt = -\frac{\varphi''(0)}{2} - \varphi'(0) + \varphi(1) - \varphi(0)$ que prova exatamente o que queríamos. $\square$

9. Mostre que dado $x > 0$ existe $c \in (0,x)$ tal que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^{cx}x^3}{3!}$. Use este resultado com $x = 1$ para mostrar que $e \in (\frac{5}{2}, 3)$.

   Demonstração. Observe inicialmente que o Teorema da Média nos dá $\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt = \varphi'''(c)\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}dt = -\frac{\varphi'''(c)}{2}\frac{(1-t)^3}{3}]_0^1 = \frac{\varphi'''(c)}{3!}$, $c \in (0,1)$. Considerando agora $\varphi(t) = e^{tx}, t \in [0,1]$ temos $\varphi'(t) = xe^{tx}$; $\varphi''(t) = x^2e^{tx}$; $\varphi'''(t) = x^3e^{tx}$. Usando $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt$ obtemos $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^{cx}x^3}{3!}$, $c \in (0,1)$. Em particular, fazendo $x = 1$ obtemos $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{e^c}{6} = \frac{5}{2} + \frac{e^c}{6}$. Daí obtemos $e > \frac{5}{2}$ e $6e - 15 = e^c < e \Rightarrow 5e < 15 \Rightarrow e < 3$. Consequentemente $e \in (\frac{5}{2}, 3)$.

$\square$

10. Dado $k \in \mathbb{N}$ mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\exp(\frac{1^{(k-1)}}{n^k+1^k}).\exp(\frac{2^{(k-1)}}{n^k+2^k}).\ldots.\exp(\frac{n^{(k-1)}}{n^k+n^k})\Big) = \sqrt[k]{2}.$$

Demonstração. Por um lado temos $\lim_{n\to\infty}\Big(\exp(\frac{1^{(k-1)}}{n^k+1^k}).\exp(\frac{2^{(k-1)}}{n^k+2^k}).\ldots.\exp(\frac{n^{(k-1)}}{n^k+n^k})\Big) = \lim_{n\to\infty}\exp\Big(\frac{1^{(k-1)}}{n^k+1^k}+\frac{2^{(k-1)}}{n^k+2^k}+\ldots+\frac{n^{(k-1)}}{n^k+n^k}\Big) = \exp\Big(\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{j^{(k-1)}}{n^k+j^k}\Big)\Big)$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\exp(\frac{1^{(k-1)}}{n^k+1^k}).\ldots.\exp(\frac{n^{(k-1)}}{n^k+n^k})\Big) = \exp\Big(\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{j^{(k-1)}}{n^k+j^k}\Big)\Big). \quad (1)$$

Por outro lado, considerando $f:[0,1]\to\mathbb{R}; f(x)=\frac{x^{k-1}}{x^k+1}$ o Teorema Fundamental do Cálculo nos dá $\int_0^1\frac{x^{k-1}}{x^k+1}dx = \frac{1}{k}\ln 2 = \ln\sqrt[k]{2}$. Agora usando o Teorema de Riemann para a partição $P=\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{j}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\}$ e escolhendoo $\xi_j=\frac{j}{n}$ obtemos $\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n})\frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{(\frac{j}{n})^{k-1}}{(\frac{j}{n})^k+1}\frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j^{k-1}}{n^k+j^k}$. Como

$$\ln\sqrt[k]{2} = \int_0^1\frac{x^{k-1}}{x^k+1}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j-x_{j-1}) = \lim_{n\to\infty}\big(\sum_{j=1}^{n}\frac{j^{k-1}}{n^k+j^k}\big)$$

obtemos

$$\ln\sqrt[k]{2} = \lim_{n\to\infty}\big(\sum_{j=1}^{n}\frac{j^{k-1}}{n^k+j^k}\big). \quad (2)$$

Comparando agora as equações (1), (2) e usando novamente a continuidade da exponencial obtemos o resultado desejado. $\square$