# O TEOREMA DE BONNET

Franciane de Brito Vieira (bolsista do PIBIC/CNPq), Paulo Alexandre Araújo Sousa (Orientador, Departamento de Matemática - UFPI)

O principal objetivo deste trabalho foi provar que uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ completa com curvatura Gaussiana $K \geq \delta > 0$ é compacta (Teorema de Bonnet). Para tanto, obtivemos uma classificação das geodésicas como soluções de um problema variacional, a saber:

*Seja* $\gamma : [0, l] \to S$ *uma curva parametrizada regular, onde o parâmetro* $s \in [0, l]$ *é o comprimento de arco de* $\gamma$*. Se* $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ *é uma variação própria de* $\gamma$ *e* $L(t) = \int_0^l \left|\frac{\partial h}{\partial s}(s, t)\right| ds$*, então* $\gamma$ *é uma geodésica se, e somente se,* $L'(0) = 0$*.*

Como $L'(0) = 0$, para toda variação própria de uma geodésica, nossa próxima informação sobre o comprimento de curvas vizinhas é dada por $L''(0)$.

*Sejam* $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ *uma variação própria ortogonal de uma geodésica* $\gamma : [0, l] \to S$ *parametrizada pelo comprimento de arco* $s \in [0, l]$ *e* $V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0)$ *o campo variacional de* $h$*. Então*

$$L''(0) = \int_0^l \left( \left| \frac{D}{\partial s} V(s) \right|^2 - K(s)|V(s)|^2 \right) ds,$$

*onde* $K(s) = K(s, 0)$ *é a curvatura Gaussiana de* $S$ *em* $\gamma(s) = h(s, 0)$*.*

Como as geodésicas localmente minimizam o comprimento, segue que para toda variação própria ortogonal de uma geodésica temos $L'(0) = 0$ e $L''(0) \geq 0$. Utilizando este fato juntamente com a expressão obtida para a segunda variação do comprimento de arco, obtemos o Teorema de Bonnet.

**Teorema 1** (Bonnet)**.** *Suponha que a curvatura Gaussiana* $K$ *de uma superfície completa* $S$ *satisfaça* $K \geq \delta > 0$*. Então* $S$ *é compacta e o diâmetro de* $S$ *satisfaz a desigualdade*

$$diam(S) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

**Palavras-Chave:** Superfície, Variação do comprimento, Teorema de Bonnet.

# Referências

[1] Alencar, H. e Walcy, S. - *Geometria das Curvas Planas.* XV Escola de Geometria Diferencial, 2008.

[2] do Carmo, M.P. - *Geometria das Curvas e Superfícies.* Textos Universitários - SBM, 2005.

[3] Gelfand, I.M. and Fomin, S.V. - *Calculus of Variations*. Editora Dover, 2000.

[4] Guggenheimer, H.W. - *Differential Geometry*. Editora Dover, 2007.

[5] Lima, E.L. - *Curso de Análise Vol. 2*. Projeto Euclides - IMPA, 2004.

[6] Tenenblat, K. - *Introdução à Geometria Diferencial*. Editora Blucher, 2008.

[7] Weinstock, R. - *Calculus of Variations*. Editora Dover, 2006.