Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Antonio Luiz Pereira (Bolsista PIBIC ICV-UFPI
Alexandro Marinho Oliveira (Orientador),
Departamento de Matemática-CMRV-UFPI

1 Introdução

Primeiramente foi se feito um estudo das Equações Diferenciais de primeira ordem e de ordem superior, começando com o método dos fatores integrantes. Onde uma equação diferencial de primeira ordem é do tipo. $dy/dt = f(t, y)$, onde f é uma função de duas variáveis dada. Qualquer função diferencial $y = \alpha(t)$ que satisfaça essa equação para todo t em algum intervalo é uma solução e o objetivo é determinar se tais funções existem e caso existam, desenvolver métodos para encontra-las. Mas para uma função arbitraria f, não existe método geral para resolver em termo de uma função elementar. Por isso há vários métodos de resolver uma equação diferencial de primeira ordem, onde se destacam as equações lineares, as equações separáveis, as equações exatas, as de bernoulle entre outras.
Foi também trabalhado os campos de direções bem como modelagem matemática que é frequentemente desejável descrever o comportamento de algum sistema ou fenômeno da vida real em termos matemáticos, que sejam eles físicos, sociológicos ou mesmo econômicos.
Na segunda parte, foi estudado sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares, no inicio desse estudo, foi feito bastante definições, para a demonstração dos principais teoremas. Nesta segunda parte também foi feitos alguns exercicios.

A metodologia usada pelo orientando foi fazer exposições orais semanas ao professor orientador, com horários estabelecidos pelo orientador. Cada exposição feita pelo orientando, foi bastante trabalhado o conteúdo de equações diferenciais,bem como sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares, todas as exposições foram ministradas para o professor orientador, como para todos os orientandos do departamento de matemática da UFPI.Todas as duvidas do orientando foram levadas ao seu orientador, para melhor fixação e melhor aprendizagem, com isso as exposições foram bem trabalhada pelo orientando.

2 Resultados Obtidos

O principal resultado estudado é o seguinte: considere a equação homogênea da forma

$$x' = A(t)x$$

onde A é uma matriz $n \times n$ constante Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental da equação $x' = A(t)x$, com $\phi_0 = I_d$. Então temos a proposição a seguir.

Proposição 2.1 *Seja $\phi(t)$ uma matriz fundamental então temos que*

1. $\phi'(t) = A(t)\phi(t), \phi(0) = I_d$
2. $\phi(t + s) = \phi(t)\phi(s), \forall t, s \in \mathbb{R}$
3. $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$

Demonstração de (1):Como $\phi(t)$ é uma matriz fundamental, por hipotese temos que $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ com $\phi(0) = I_d$
Demonstração de (2):Fixemos s, consideremos agora a equação matricial

$$x' = A(t)x$$

e as matrizes

$$\mu(t) = \phi(t + s), \;\; \psi(t) = \phi(t)\phi(s)$$

Para a primeira matriz, temos

$$\mu'(t) = \phi'(t+s) = A\phi(t+s) = A\mu(t)$$

Logo temos que $\mu(t)$ é solução da equação $x' = A(t)x$, com $x(0) = \phi(s)$. Para a segunda matriz, temos

$$\psi'(t) = [\phi(t)\phi(s)]' = \phi'(t)\phi(s) = A\phi(t)\phi(s) = A\psi(t)$$

Com isto temos que, ψ também é solução da equação $x' = A(t)x$, com a condição inicial $x(0) = \psi(s)$. Porém pelo Teorema 2.2.6 a solução é única. Então temos

$$\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$$

Demonstração de (3):Pelo item anterior, temos

$$\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s), \forall t, s \in \mathbb{R}$$

Então fazendo $s = -t$, teremos que $\phi(0) = \phi(t)\phi(-t)$ mas por hipótese, temos que $\phi(0) = I_d$ então, $\phi(-t) = \phi^{-1}(t)$.

Exemplo 2.2 *Calcular* e^{tA} *com*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

solução: Efetuando os cálculos obtemos

$$A^{2k} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}$$

e

$$A^{2k-1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{k+1} \\ (-1)^k & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{2k-1} t^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k-1}}{(2k-1)!} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k-1}}{(2k-1)!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cost & sent \\ -sent & cost \end{bmatrix}$$

Referências

[1] Boyce William E. Diprima, Ricard C.-Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 5ªEdição LTC. Rio de Janeiro,1994.

[2] Zill, Dennis G.-Equações Diferenciais com Aplicações em modelagem. São Paulo,2003.

[3] A. Leitão, Tópicos em Teoria de Controle:Manuscrito atualizado em 04 de Outubro de 2004.

[4] Nilo K. Introdução à topologia geral, 2ª ed. Florianópolis: Ed. da UFSC. 2002.

[5] Leithold L. O cálculo com geometria Analítica, V1.3ed. São Paulo: Harbra, 1994.