

Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Departamento de Física

Relatório Final de Iniciação Científica - PIBIC-UFPI

Física Estatística e Termodinâmica

Período 2010-2011

Teresina Agosto/2011

Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Departamento de Física

Estudo Numérico da Dinâmica de Bolhas em uma Célula de Hele-Shaw

Rômulo Brandão Madeira
Departamento de Física - UFPI
Bolsista PIBIC/UFPI

Prof. Dr. José Pimentel de Lima
Departamento de Física - UFPI
Orientador

Teresina Agosto/2011

Sumário

1	Introdução	5
2	Fluidos Viscosos	7
2.1	A equação de Navier-Stokes	7
2.2	O número de Reynolds	7
2.3	Lei de Darcy aplicada ao problema	8
3	Equações do movimento	10
3.1	Corrente de fluido bidimensional	10
3.2	Descrição do problema	11
3.3	Construção em mapeamento conforme	13
4	Soluções para cada simetria	16
4.1	Simetria em relação à linha central	16
4.2	Simetria <i>fore-and-aft</i>	17
5	Atividades realizadas	18
6	Conclusões	19

Resumo

Nos últimos vinte anos, houve uma grande atenção ao estudo do movimento da interface entre dois fluidos viscosos. Este problema é um sistema fácil de ser realizado experimentalmente e sensível à investigação matemática. A célula de Hele-Shaw tornou-se uma ferramenta fundamental para tal estudo.

O problema da dinâmica interfacial é tratável, teoricamente, quando a tensão superficial é desprezada. Para esses casos, várias soluções foram encontradas para fluxos tanto estáveis quanto dependentes do tempo. Em particular, uma descrição de uma solução analítica em termos de integrais elípticas para duas bolhas e para um dedo como uma bolha no seu topo foi dada por Giovani Vasconcelos.

O problema de um dedo com uma pequena bolha no seu topo foi estudado por Couder, Gérard e Rabaud. Foi notado que, devido a presença da bolha, o dedo ficou consideravelmente mais estreito que o normal de Saffman-Taylor. O efeito também vale para bolhas, quando uma pequena bolha localiza-se sobre o "nariz" de outra maior, esta fica mais alongada e sua velocidade aumenta. Estes fenômenos ainda não foram completamente entendidos.

Soluções para um número arbitrário N de bolhas movendo-se com velocidade constante em um canal de Hele-Shaw quando a tensão superficial é desprezada foram encontradas por Giovani Vasconcelos [1] em 2001. Quanto às simetrias, essas soluções são divididas em dois tipos: (i) soluções para bolhas simétricas em relação à linha do centro do canal e (ii) soluções para bolhas com simetria *fore-and-aft*. Estas são construídas usando-se mapeamento conforme e, em alguns casos especiais, expressas em termos de integrais elípticas.

O movimento ascendente de bolhas num célula de Hele-Shaw de geometria retangular ainda não possui uma compreensão completa, muito menos a forma das bolhas adquiridas nesse movimento. Inicialmente, foi proposto para esse trabalho, o estudo do fluxo estacionário de bolhas em uma célula de Hele-Shaw, como expresso em [1] e [4], assim com a participação da solução numérica da equação de Navier-Stokes.

O estudo inicial do problema de Saffman-Taylor [4] trata-se de resolver a equação de Laplace para a pressão, atentando-se para as condições de contorno. Neste trabalho, apresentaremos a estrutura do problema e como resolvê-lo analiticamente. Para isto o aluno analisou o artigo publicado em 2001 por Giovani Vasconcelos [1] atentando-se aos passos que levaram às soluções analíticas do problema para dois tipos de simetrias: para bolhas simétricas em relação à linha do centro do canal e para bolhas com simetria *fore-and-aft*, as quais serão explicadas posteriormente.

Palavras-chave: célula de Hele-Shaw; dinâmica de bolhas

Capítulo 1

Introdução

O problema mais simples de hidrodinâmica na classe dos fenômenos não-lineares é o problema de Saffman-Taylor, que consiste de dois fluidos movendo-se em um espaço estreito entre duas placas paralelas. Tal geometria é conhecida como célula de Hele-Shaw. Se a separação b entre as placas for muito pequena, o problema pode ser considerado bidimensional. Chamando as coordenadas perpendiculares à placa de z e as outras duas de x e y , o problema torna-se determinar as componentes da velocidade v_x e v_y , a pressão $P(x, y)$ e o vetor de duas componentes $\gamma(s)$ que descreve a posição da interface quando s varia.

A velocidade média paralela às placas é proporcional à força local:

$$\mathbf{v}(x, y) = -K_i[\nabla P(x, y) - \rho_i \mathbf{g}] \quad (1.1)$$

Onde K_i é dado em termos da viscosidade do fluido μ_i e o espaçamento entre as placas b por:

$$K_i = \frac{b^2}{12\mu_i}, \quad (1.2)$$

$i = 1, 2$ indica os diferentes fluidos, ρ_i é a densidade do fluido e \mathbf{g} é a componente da gravidade paralela às placas. A equação acima é determinada a partir da lei de Darcy para fluidos, que será apresentada a diante.

Assumindo que o fluido em questão é incompressível, de forma que a divergência da velocidade zera, temos que:

$$\nabla^2 P = 0. \quad (1.3)$$

A continuidade também implica que, na interface, as componentes normais da velocidade são iguais entre si e à velocidade da interface:

$$\mathbf{v}_n = -K_1(\nabla P_1)_n = -K_2(\nabla P_2)_n. \quad (1.4)$$

Outra condição de fronteira é necessária para dar o salto da pressão através das interfaces. Físicos teóricos que trabalham com esse problema tomam, com frequência, o salto da pressão como a tensão superficial T vezes a curvatura κ observada no plano xy :

$$\Delta P = T\kappa. \quad (1.5)$$

Park and Homsy sugeriram que ao invés da equação 1.5 , que seria válido se o sistema fosse mesmo bidimensional, a equação que representa o salto da pressão seria:

$$\Delta P = \frac{T}{b/2} [1 + 3, 80(\frac{\mu v_n}{T})^{\frac{2}{3}}] + \frac{\pi}{4} T \kappa. \quad (1.6)$$

Capítulo 2

Fluidos Viscosos

2.1 A equação de Navier-Stokes

Agora será apresentado o efeito da dissipação da energia que acontece no decorrer do movimento de um fluido. Isto é um processo resultante da irreversibilidade termodinâmica do movimento, que é devido à fricção interna (viscosidade) e condução térmica. Os coeficientes η e ζ , definidos como *coeficientes de viscosidade*, sendo ζ a *segunda viscosidade*, são independentes da velocidade e ambas positivas:

$$\eta > 0, \zeta > 0. \quad (2.1)$$

Normalmente, os coeficientes de viscosidade não mudam consideravelmente no fluido. Estes coeficientes podem ser considerados constantes. Nós então temos a equação descrevendo o movimento de um fluido viscoso, conhecida como *Equação de Navier-Stokes*:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (2.2)$$

Onde ρ é a densidade do fluido.

A *Equação de Navier-Stokes* se torna bem mais simples se o fluido em consideração for incompressível, assim $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. O último termo da direita de 2.2 se torna zero. Quase sempre, considera-se os fluidos como incompressíveis, portanto usa-se a equação do movimento na forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}. \quad (2.3)$$

2.2 O número de Reynolds

Com o estudo do movimento de fluidos viscosos obtém-se importantes resultados com argumentos simples. Considere algum tipo particular de movimento, como o movimento de um corpo através do fluido. Quando o corpo não é esférico, a direção do movimento deve ser especificada. Pode-se considerar o fluxo em uma região

com fronteiras definitivas, um cano por exemplo.

A viscosidade cinemática, definida como $\nu = \eta/\rho$, é o único parâmetro que caracteriza um fluido que aparece na equação de hidrodinâmica 2.3. O fluxo é dependente da velocidade e da forma e dimensões do corpo que se move através do fluido, através das condições de fronteira. Quando a forma do corpo é dada, as propriedades geométricas podem ser determinadas por uma dimensão linear denotada por l . Considerando a velocidade da corrente principal como u , qualquer fluxo é caracterizado por três parâmetros, ν , u e l , as quais tem as seguintes dimensões:

$$\nu = \text{cm}^2/\text{s}, l = \text{cm}, u = \text{cm}/\text{s}. \quad (2.4)$$

Somente uma quantidade adimensional forma-se a partir das três acima. Ela é ul/ν . Esta combinação é conhecida como *Número de Reynolds*, denotada por R :

$$R = \rho ul/\eta = ul/\nu. \quad (2.5)$$

Se houver outro parâmetro adimensional ele pode ser escrito como uma função de R .

A equação de Navier-Stokes pode se tornar mais simples para fluxos com número de Reynolds pequeno, ou seja, para escoamentos estacionários como os considerados neste trabalho. Quando um fluxo de um fluido incompressível é estável, a equação é

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}. \quad (2.6)$$

O termo $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ é da magnitude de u^2/l . Já $\eta/\rho\Delta\mathbf{v}$ é da magnitude de $\eta u/\rho l^2$, sendo que a razão dos dois fornece o número de Reynolds. Assim, o termo $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ é desprezado quando o número de Reynolds for pequeno. A equação de movimento reduz-se a equação

$$-\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} = 0. \quad (2.7)$$

Ela determina o movimento juntamente com a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.8)$$

Nota-se que tomando o rotacional da equação 2.7 obtém-se

$$\Delta\nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (2.9)$$

2.3 Lei de Darcy aplicada ao problema

Em dinâmica dos fluidos, a lei de Darcy é uma equação derivada que descreve o fluxo de um fluido através de um meio. A lei foi encontrada por Henry Darcy com base nos resultados de experimentos. Representa a base científica da permeabilidade de fluidos.

A permeabilidade dos fluidos é uma propriedade em permitir o escoamento de água através dele. O coeficiente de permeabilidade, K , é utilizado para parametrizar a permeabilidade. É um coeficiente que representa a velocidade com que água atravessa uma amostra. Em 1856, Darcy enunciou a lei do regime de escoamento.

Considere duas placas paralelas separadas por uma distância pequena b . O espaço entre essas duas placas é preenchido por um fluido viscoso. Para este escoamento a equação de Navier-Stokes 2.3 se reduz a 2.7. Se considerarmos os eixos x e y sobre o plano paralelo às placas temos que as variações da velocidade sobre o eixo z é muito maior que as variações sobre os demais. Dessa forma o operador Δ se aproxima a

$$\Delta \approx \mathbf{z} \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.10)$$

Dessa forma a equação 2.7 se torna

$$-\nabla p + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{v} = 0. \quad (2.11)$$

Dividindo a equação 2.11 por componentes, temos:

$$-\frac{\partial}{\partial x} p + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_x = 0 \quad (2.12)$$

e

$$-\frac{\partial}{\partial y} p + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_y = 0. \quad (2.13)$$

Supondo que o segundo termo da equação 2.12 seja uma constante $-K$, temos:

$$v_x = -\frac{K}{2\eta} z^2 + C_1(x, y)z + C_2(x, y). \quad (2.14)$$

Agora imaginemos q as placas estejam dispostas nas posições $z = 0$ e $z = b$. Usando essa condição de contorno na equação 2.14, obtemos:

$$C_1 = \frac{Kb}{2\eta} \quad (2.15)$$

e

$$C_2 = 0. \quad (2.16)$$

Daí, temos que a equação para v_x é

$$v_x = \frac{K}{2\eta} (bz - z^2). \quad (2.17)$$

Analogamente, resolvendo a equação 2.13, encontramos:

$$v_y = \frac{K}{2\eta} (bz - z^2). \quad (2.18)$$

Sabendo que a velocidade \mathbf{v} é $\mathbf{v} = v_x \mathbf{x} + v_y \mathbf{y}$ e utilizando as equações a cima para v_x e v_y obtemos a lei de Darcy aplicada ao problema:

$$\mathbf{v} = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla p. \quad (2.19)$$

Capítulo 3

Equações do movimento

3.1 Corrente de fluido bidimensional

Considere um fluido cuja componente z da velocidade em qualquer ponto seja zero. A velocidade $V(x, y)$ em qualquer ponto pode ser representada por um número complexo:

$$V(x, y) = p(x, y) + iq(x, y), \quad (3.1)$$

onde $p(x, y)$ e $q(x, y)$ são as componentes x e y da velocidade, respectivamente.

Se o fluido em consideração for irrotacional, ou seja, $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, então a velocidade pode ser representada por um gradiente de uma função escalar $\phi(x, y)$, chamada de *velocidade potencial*:

$$\mathbf{V}(x, y) = \nabla\phi(x, y). \quad (3.2)$$

Linhas cuja velocidade potencial é constante são conhecidas como equipotenciais e são sempre normais à velocidade:

$$\phi(x, y) = c. \quad (3.3)$$

Se um fluido for incompressível e livre de fontes e sorvedouros a velocidade potencial deve obedecer à equação de Laplace:

$$\Delta\phi = 0 \Rightarrow \phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = 0, \quad (3.4)$$

daí conclui-se que ϕ é uma função harmônica.

Sendo ϕ uma função harmônica então deve existir uma função $\psi(x, y)$, chamada *stream*, que é harmônico conjugado de ϕ . A velocidade é sempre perpendicular às linhas cuja função *stream* é constante, $\psi(x, y) = c$. Essas linhas são chamadas de linhas de fluxo. Qualquer linha através da qual o fluido não pode passar é uma linha de fluxo.

Definimos a função $F(z)$ como sendo $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, ela é conhecida como *potencial complexo* do fluido. Em vista das condições de Cauchy-Riemann, temos que:

$$V(z) = \overline{F'(z)}. \quad (3.5)$$

De acordo com a seção 78 do livro em referência [6], temos que:

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{x, y} -\phi_t(r, t)dr + \phi_r(r, t)dt = \quad (3.6)$$

$$= \int_C -q(r, t)dr + p(r, t)dt = \int_C V_n(x, y)d\sigma, \quad (3.7)$$

então:

$$\psi(x, y) = \int_C V_n(x, y) d\sigma. \quad (3.8)$$

Essa última expressão mostra que a função $\psi(x, y)$ representa o fluxo do fluido através de C , um caminho qualquer ligando os pontos (x_0, y_0) (arbitrário) e (x, y) .

3.2 Descrição do problema

Consideremos o sistema de N bolhas movendo-se com velocidade constante U na direção x em uma célula de Hele-Shaw retangular de largura $2a$. A velocidade do fluido no infinito é igual a V . Devemos fazer algumas suposições a fim de deixar o problema analiticamente tratável, a saber:

- O fluido dentro das bolhas tem viscosidade desprezível, de forma que a pressão no interior da bolha é constante.
- A tensão superficial é desprezível. Assim, a pressão do fluido viscoso terá um valor constante ao longo da superfície da bolha.
- Os efeitos do fino filme que fica entre a bolha e as placas são desprezíveis.
- As placas são colocadas horizontalmente, de forma que a gravidade não tem influência.

devemos nos preocupar também com qual simetria está em questão: (i) simetria em relação à linha central ou (ii) simetria *fore-and-aft*. Veja a figura 3.1.

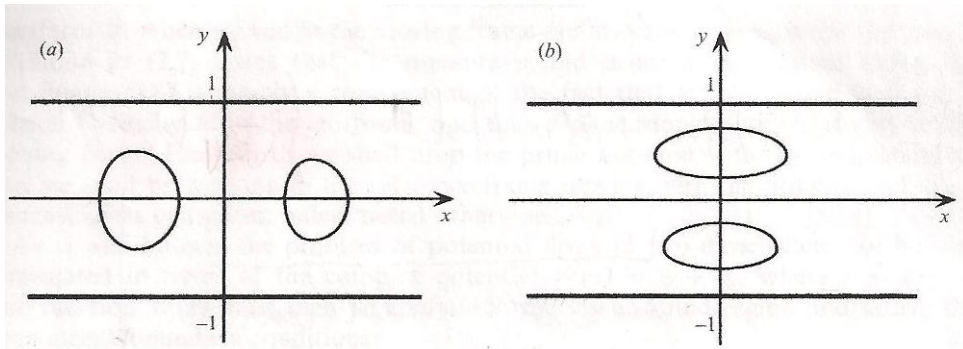


Figura 3.1: Simetrias: (a) em relação à linha central, (b) simetria fore-and-aft

A velocidade $\mathbf{v}(x, y)$ para um fluido viscoso em uma célula de Hele-Shaw é governada pelas seguintes equações:

$$\mathbf{v} = \nabla\phi, \quad (3.9)$$

considerando-se um fluido irrotacional,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla^2\phi, \quad (3.10)$$

considerando-se o fluido incompressível, onde $\phi(x, y)$, potencial velocidade, é dado por

$$\phi = -\frac{b^2}{12\mu}p, \quad (3.11)$$

pela lei de Darcy ¹. Onde p é a pressão do fluido.

¹Daqui por diante será usado μ ao invés de η para a viscosidade

Seguindo o formalismo de Saffman-Taylor, define-se algumas variáveis adimensionais:

$$x' = \frac{x - Ut}{a}, \quad y' = \frac{y}{a} \quad (3.12)$$

$$\phi' = \frac{\phi - Ux}{(U - V)a}, \quad \psi' = \frac{\psi - Uy}{(U - V)a}, \quad (3.13)$$

onde ψ é a função *stream* associada a ϕ e t é o tempo. \mathcal{C}_k representará a interface da k -ésima bolha, onde $k = 1, \dots, N$, e as paredes do canal são linhas cujo y é igual a $\pm a$.

Nas fronteiras as seguintes condições são satisfeitas;

$$\psi' = \mp 1 \quad (3.14)$$

em $y' = \pm 1$ (significa que as paredes são linhas de corrente),

$$\psi' = \psi'_k \quad (3.15)$$

e

$$\phi' = -\mathcal{U}x' + \phi'_k \quad (3.16)$$

em \mathcal{C}_k (as interfaces são linhas de corrente),

$$\phi' \approx -x' \quad (3.17)$$

e

$$\psi' \approx -y' \quad (3.18)$$

quando $|x'| \rightarrow \infty$ (propriedade derivada da velocidade no infinito). \mathcal{U} é definido como

$$\mathcal{U} = \frac{U}{U - V}, \quad (3.19)$$

ϕ_k e ψ_k são constantes a ser determinadas.

Os fluxos potenciais em duas dimensões podem ser formulados em termos do potencial complexo $W(z) = \phi + i\psi$, onde $z = x + iy$. $W(z)$ mapeia a região do plano z no correspondente domínio da corrente no plano W . A partir das equações 3.14-3.18, a função $W(z)$, analítica na região do fluxo, satisfaz as condições de fronteira apropriadas²:

$$ImW = \mp 1 \quad (3.20)$$

em $y = \pm 1$,

$$W = -\mathcal{U}x + \phi_k + i\psi_k \quad (3.21)$$

em \mathcal{C}_k , $k = 1, \dots, N$,

$$W \approx -z \quad (3.22)$$

quando $|x| \rightarrow \infty$, onde ImW denota a parte imaginária de W .

Para a simetria em relação à linha central do canal considera-se apenas a parte superior ($y \geq 0$) na resolução do problema. Quando é *fore-and-aft* considera-se apenas a parte da direita ($x \geq 0$).

Uma invariância de rotação para fluxos estáveis foi descoberto por Tian e Giovanni Vasconcelos. Se uma curva \mathcal{C} é uma solução para uma bolha movendo-se com velocidade U na direção x de uma célula de Hele-Shaw ilimitada, então a curva \mathcal{C}' obtida rotacionando a curva \mathcal{C} sobre a origem por um ângulo α também é uma solução com a velocidade U . Assim, a nova velocidade da bolha \mathbf{U}' é dada por

$$\mathbf{U}' = (U \cos \alpha, U \sin \alpha), \quad (3.23)$$

e a velocidade no infinito dada por

$$\mathbf{V}' = (U \cos \alpha, (U - V) \sin \alpha). \quad (3.24)$$

²Daqui por diante a notação adimensional será usada sem a linha (')

Em especial, se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nós obtemos o potencial complexo rotacionado $\tilde{W}(z) = i[W(z) + \mathcal{U}z]$. Esta equação deve obedecer as seguintes condições de fronteira:

$$Re\tilde{W}(z) = \mp(\mathcal{U} - 1), \quad (3.25)$$

em $y = \pm 1$,

$$\tilde{W} = \mathcal{U}y - \psi_k + i\phi_k, \quad (3.26)$$

em \mathcal{C}_k e

$$\tilde{W} \approx i(\mathcal{U} - 1)z, \quad (3.27)$$

quando $|x| \rightarrow \infty$. Para visualizar estas condições perceba a semelhança entre as figuras 3.2(c) e 3.3(b) e entre as figuras 3.3(c) e 3.2(b).

3.3 Construção em mapeamento conforme

Considera-se o mapeamento $z = f(\zeta)$ do semiplano superior ζ no domínio do fluido. O intervalo $|\zeta| > 1$ e $Re\zeta = 0$ é mapeado nas paredes do canal. Já as bolhas \mathcal{C} são as imagens dos intervalos \mathcal{J}_k no eixo real de ζ definido por

$$\mathcal{J}_k \equiv (v_{2k-1}, v_{2k}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.28)$$

sendo $-1 < v_1 < v_2 < \dots < v_{2N} < 1$.

Agora, definindo os mapeamentos $\Phi(\zeta)$ e $\Sigma(\zeta)$ como sendo $W = \Phi(\zeta)$ e $\tilde{W} = \Sigma(\zeta)$. A partir da relação $\tilde{W}(z) = i[W(z) + \mathcal{U}z]$ e os mapeamentos definidos a cima, temos que:

$$\Sigma(\zeta) = i[\Phi(\zeta) + \mathcal{U}f(\zeta)] \Rightarrow \Phi(\zeta) + \mathcal{U}f(\zeta) = -i\Sigma(\zeta) \quad (3.29)$$

Daí tiramos essa importante relação;

$$f(\zeta) = \frac{-1}{\mathcal{U}}[\Phi(\zeta) + i\Sigma(\zeta)]. \quad (3.30)$$

Para $\zeta = s \in \mathcal{J}_k$, tanto $\Phi(\zeta)$ quanto $\Sigma(\zeta)$ tem partes imaginárias constantes. Dessa consideração, e partindo da equação 3.30, temos que:

$$x_k(s) = \frac{-1}{\mathcal{U}}[Re[\Phi(s)] + Re[i\Sigma(s)]] = \quad (3.31)$$

$$= \frac{-1}{\mathcal{U}}[Re\Phi(s) + Re[iRe\Sigma(s) + i^2Im\Sigma(s)]] = \frac{-1}{\mathcal{U}}[-\phi_k + Re\phi(s)] \Rightarrow \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow x_k(s) = \frac{1}{\mathcal{U}}[\phi_k - Re\Phi(s)]. \quad (3.33)$$

onde $Im\Sigma(s) \equiv \phi_k$. De maneira equivalente para $y_k(s)$:

$$y_k(s) = \frac{-1}{\mathcal{U}}[Im\Phi(s) + Im[i\Sigma(s)]] = \quad (3.34)$$

$$= \frac{-1}{\mathcal{U}}[\psi_k + Im[iRe\Sigma(s) + i^2Im\Sigma(s)]] = \frac{-1}{\mathcal{U}}[\psi_k + Re\Sigma(s)] \Rightarrow \quad (3.35)$$

$$\Rightarrow y_k(s) = \frac{-1}{\mathcal{U}}[\psi_k + Re\Sigma(s)]. \quad (3.36)$$

Daí, temos que a bolha \mathcal{C}_k é dada pelas seguinte equações paramétricas:

$$x_k(s) = \frac{1}{\mathcal{U}}[\phi_k - Re\Phi(s)], \quad (3.37)$$

$$y_k(s) = -\frac{1}{\mathcal{U}}[\psi_k + Re\Sigma(s)]. \quad (3.38)$$

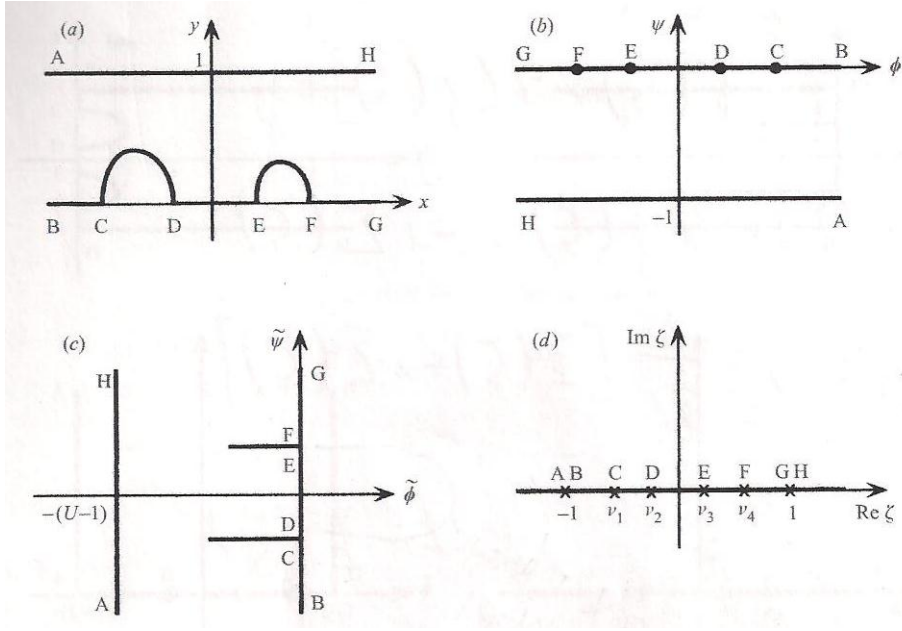


Figura 3.2: Geometria para bolhas com simetria em relação à linha central: (a) plano z , (b) plano W , (c) plano \tilde{W} , (d) plano ζ

Perceba que $\psi_k = 0$ para simetria central e $\phi_k = 0$ para simetria *fore-and-aft*. Veja as figura 3.2(b) e 3.3(c).

Soluções para $\mathcal{U} = 2$ geram soluções para $\mathcal{U} > 1$ por meio de uma mudança de escala apropriada. O domínio no plano W não depende de \mathcal{U} . Isso pode ser visualizado nas figuras 3.2(b) e 3.3(b). Já o domínio no plano \tilde{w} pode ser obtido por uma mudança de escala do domínio para $\mathcal{U} = 2$. Veja as figuras 3.2(c) e 3.3(c). Assim, temos que:

$$\Phi(\mathcal{U})(\zeta) = \Phi_2(\zeta) \quad (3.39)$$

e

$$\Sigma(\mathcal{U})(\zeta) = (\mathcal{U} - 1)\Sigma_2(\zeta). \quad (3.40)$$

Denota-se $z_k^0(s) = x_k^0(s) + y_k^0(s)$ como sendo a solução para a k -ésima bolha com $\mathcal{U} = 2$. A solução $z_k(s)$ para a bolha \mathcal{C}_k pode ser dada em função da solução para $\mathcal{U} = 2$ como:

$$x_k(s) = \rho\phi_k^0 + (1 - \rho)x_k^0(s), \quad (3.41)$$

$$y_k(s) = \rho\psi_k + (1 + \rho)y_k^0(s), \quad (3.42)$$

sendo $\rho = 1 - \frac{2}{\mathcal{U}}$ e $\phi_k^0 = [\phi_k]_{\mathcal{U}=2}$. Daqui por diante consideraremos apenas $\mathcal{U} = 2$.

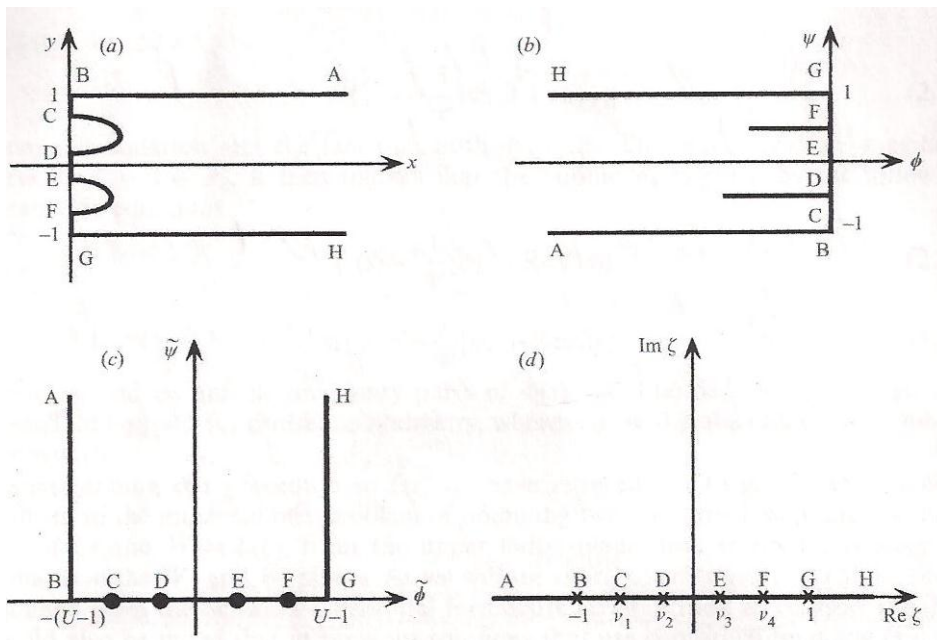


Figura 3.3: Geometria para bolhas com simetria *fore-and-aft*: (a) plano z , (b) plano W , (c) plano \tilde{W} , (d) plano ζ

Capítulo 4

Soluções para cada simetria

4.1 Simetria em relação à linha central

A solução geral para múltiplas bolhas é encontrada obtendo-se os mapeamentos conformes $W = \Phi(\zeta)$ e $W' = \Sigma(\zeta)$ em conjunto com as equações 3.41 e 3.42. A interface \mathcal{C}_k , para $k = 1, \dots, N$, pode ser dada pelas seguintes equações paramétricas:

$$x_k(s) = x_0^k + \frac{1}{\pi} \tanh^{-1} s, \quad (4.1)$$

$$y_k(s) = \frac{(-1)^{N+k+1}}{\pi} \int_{v_{2k-1}}^s \frac{\sum_{j=0}^N a_j t^j}{(1-t^2) \prod_{j=1}^{2N} |t-v_j|^{1/2}} dt. \quad (4.2)$$

Nas equações acima, temos $s \in \mathcal{J}_k$ e

$$x_0^k = \frac{(-1)^N}{\pi} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^l \int_{v_{2l}}^{v_{2l+1}} \frac{\sum_{j=0}^N a_j t^j}{(1-t^2) \prod_{j=1}^{2N} |t-v_j|^{1/2}} dt. \quad (4.3)$$

Os termos a_j são coeficientes de valores reais.

Para o caso da bolha de Taylor-Saffman, $N = 1$, a solução reproduz a já obtida por Taylor & Saffman. Considerando $N = k = 1$ as equações paramétricas tomam a forma:

$$x(s) = \frac{1}{\pi} \tanh^{-1} s, \quad (4.4)$$

$$y(s) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{\frac{v^2 - s^2}{1 - v^2}}. \quad (4.5)$$

O problema de duas bolhas ($N = 2$) também pode ser descrito em termos de integrais elípticas. Para $N = 2$ e $k = 1$ as equações paramétricas para a primeira bolha, $v_1 \leq s \leq 0$, são:

$$x_1(s) = \frac{1}{\pi} \tanh^{-1} s, \quad (4.6)$$

$$y_1(s) = \frac{1}{\pi} \int_{v_1}^s \frac{a + bt + ct^2}{(1-t^2) \sqrt{t(v_1-t)(v_3-t)(v_4-t)}} dt. \quad (4.7)$$

A segunda bolha, $k = 2$ e $v_3 \leq s \leq v_4$, é descrita por

$$x_2(s) = x'_0 + \frac{1}{\pi} \tanh^{-1} s, \quad (4.8)$$

$$y_2(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{v_3}^s \frac{a + bt + ct^2}{(1-t^2)\sqrt{t(t-v_1)(t-v_3)(v_4-t)}} dt. \quad (4.9)$$

A constante x'_0 , mostrada acima, é dada por

$$x'_0(s) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{v_3} \frac{a + bt + ct^2}{(1-t^2)\sqrt{t(t-v_1)(v_3-t)(v_4-t)}} dt. \quad (4.10)$$

e os coeficientes a , b e c são determinados pelas condições:

$$y_1(0) = y_2(v_4) = 0, \quad (4.11)$$

$$a + b + c = \sqrt{(1-v_1)(1-v_3)(1-v_4)}. \quad (4.12)$$

4.2 Simetria *fore-and-aft*

Da mesma forma que na seção anterior, a solução geral para bolhas com simetria *fore-and-aft* é encontrada após descobrir os mapeamentos $W = \Phi(\zeta)$ e $W' = \Sigma(\zeta)$ em conjunto com as equações 3.41 e 3.42. A interface \mathcal{C}_k para a k -ésima bolha é dada pelas equações paramétricas:

$$x_k(s) = \frac{(-1)^{N+k+1}}{\pi} \int_{v_{2k-1}}^s \frac{\sum_{j=0}^N a_j t^j}{\sqrt{1-t^2} \prod_{j=1}^{2N} |t-v_j|^{1/2}} dt, \quad (4.13)$$

$$y_k(s) = y_0^k + \frac{1}{\pi} \cos^{-1} s. \quad (4.14)$$

O parâmetro s pertence ao intervalo \mathcal{J}_k , sendo \mathcal{J}_k definido em 3.28 e y_0^k definido como:

$$y_0^k = \frac{(-1)^{N+1}}{\pi} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \int_{v_{2l}}^{v_{2l+1}} \frac{\sum_{j=0}^N a_j t^j}{\sqrt{1-t^2} \prod_{j=1}^{2N} |t-v_j|^{1/2}} dt. \quad (4.15)$$

Os termos a_j são coeficientes de valores reais.

Para uma única bolha, $N = 1$, o método fornece uma solução em termos de integrais elípticas como a seguir:

$$x(s) = \frac{1}{\pi} \int_{v_1}^s \frac{b-t}{\sqrt{(1-t^2)(t-v_1)(v_2-t)}} dt, \quad (4.16)$$

$$y(s) = y_0 + \frac{1}{\pi} \cos^{-1} s. \quad (4.17)$$

Onde $-1 < v_1 \leq s \leq v_2 < 1$ e $b = -a_0$. A constante y_0 é definida como

$$y_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{v_1} \frac{b-t}{\sqrt{(1-t^2)(t-v_1)(t-v_2)}} dt. \quad (4.18)$$

Capítulo 5

Atividades realizadas

Dentre as atividades programadas para ser realizadas no decorrer do trabalho de iniciação científica apenas a busca da solução numérica do problema não foi concluída. Devido seu caráter conclusivo e de exigência de maturidade teórica o aluno não pôde realizar essa tarefa. No decorrer de um ano algumas dificuldades foram surgindo, inclusive a incapacidade, em alguns momentos, de lidar com o projeto de iniciação científica em conjunto com o estudo das disciplinas da universidade. Tais dificuldades porém, se tornam cada vez mais amenas. As outras atividades foram feitas regularmente, o que trouxe um amplo conhecimento teórico para o aluno, além de maturidade suficiente para continuar o projeto, a fim de chegar a conclusões mais concretas até julho de 2012, ano em que o aluno pretende apresentar o seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) sobre o assunto.

Capítulo 6

Conclusões

O problema do movimento da interface entre dois fluidos viscosos é fácil de ser realizado experimentalmente, mas delicado quanto a análise matemática. A célula de Hele-Shaw é uma ferramenta indispensável para este estudo. A dinâmica interfacial é tratável quando despreza-se a tensão superficial. Soluções foram encontradas para fluxos estáveis, como pode-se ver em [1].

Considerando um sistema com um número N de bolhas com velocidade constante em uma célula de Hele-Shaw pode-se dividir suas soluções em dois tipos: (i) soluções para bolhas simétricas em relação à linha do centro do canal e (ii) soluções para bolhas com simetria *fore-and-aft*. Para este trabalho, foi proposto o estudo do fluxo estacionário de bolhas em uma célula de Hele-Shaw [1], [4]. Com a solução numérica da equação de Navier-Stokes 2.3, 2.7.

A revisão bibliográfica realizada até aqui foi focada nos temas propostos nas referências [1], [4]. O embasamento teórico está presente principalmente nas referências [5] e [6]. Na referência [5], principalmente nos dois primeiros capítulos, está presente a introdução à dinâmica dos fluidos necessária para a realização do trabalho. Em especial, em fluidos viscosos há a apresentação da equação de Navier-Stokes 2.3, 2.7, e do número de Reynolds 2.5. Na referência [6], há o conteúdo necessário para o entendimento de funções complexas e mapeamentos conformes.

Durante o trabalho, o aluno focou sua atenção na análise das soluções dos problemas dados. Na medida do possível, os cálculos foram refeitos para melhor entendimento. O foco principal de estudo foi o artigo da referência [1].

Referências Bibliográficas

- [1] Vasconcelos, G. L. Exact solution for steady bubbles in a Hele-Shaw cell with rectangular geometry. *J. Fluid Mech.* **444** (2001) 175.
- [2] Saffman, P. G., On the rise of small air bubbles in water, *Journal of Fluid Mechanics*, **1**, (1956) 249.
- [3] Gaudlitz, D and Adms, N. A. Numerical investigation of rising bubble wake and shape variations, *Physics of Fluids* **21**, (2009) 122102.
- [4] Bension, D. Kadanoff, L. P., Liang, S, Shraian, B. I., and Tang, C., Viscous flows in two dimensions. *Reviews of Modern Physics*, **58** (1986) 977.
- [5] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*, Second Edition: Volume 6 (Ed Oxford) (2000).
- [6] Churchill, R. V. and Brown, J. W., *Complex Variables and Applications* (Mcgraw-Hill Series in Higher Mathematics)(2008).