Soluções da equação de Schrödinger linear em L^p, $1 < p < \infty$

Orientador

Prof. Dr. Roger Peres de Moura

Orientando

Leonardo Araújo de Sousa

Resumo Expandido

Estudamos o problema de Cauchy para a equação de Schrödinger linear homogênea

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

onde $u = u(x,t) \in \mathbb{C}$ e $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Provamos primeiro que, se $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então o problema de valor inicial (1) tem uma única solução $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$, onde $e^{it\Delta}(\cdot) : L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$ é o grupo unitário associado à equação em (1). Além disso,

$$\|e^{it\Delta}u_0(x)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}. \tag{2}$$

Em seguida, usando uma desigualdade de Young, provamos que

$$\|e^{it\Delta}u_0(x)\|_{L^\infty} \leq c|t|^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|_{L^1}. \tag{3}$$

Daí, combinando (2) e (3) com o teorema de Riez-Thorin, concluímos que

$$\|e^{it\Delta}u_0(x)\|_{L^p} \leq c|t|^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^{p'}}, \tag{4}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $p' \in [1,2]$. Concluímos de (4) que $e^{it\Delta} : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \mapsto L^p(\mathbb{R}^n)$ é um operador contínuo.